• $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{(x+1)\ln(x+1)}$

$=\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{X-1}{X\ln X}=+\infty \quad (X=x+1)$ car $\lim\limits_{X\to0^+}X \quad \ln X=0^-$

d'où $f$ n'est pas dérivable à droite en $-1$.

***Conclusion*** : $f$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

3°/a) $u$ est définie, continue, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x>1$,

$$u'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

d'où $\forall x>-1$, $u(x)\geq 0$.

b) $f$ est définie, continue sur $[-1,+\infty[$

$f$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{\ln^2(1+x)}=\frac{u(x)}{\ln^2(1+x)}>0$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | ‖ | | $1$ | ↗ | $+\infty$ |
| | $0$ | | | | |

$(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X-1}{\ln X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\ln X}-\dfrac{1}{\ln X}=+\infty)$ $(X=x+1)$.

4°/a) $\Delta: y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{2}x+1$.

Etudions le signe de $d(x)=f(x)-(\dfrac{1}{2}x+1)$